

Ф. Ф. ПАВЛОВ.

Применение графостатики к определению вероятнейших координат геодезического уединенного пункта.

Из имеющейся по этому вопросу литературы на русском языке наиболее обстоятельно графическое уравнивание уединенной точки разработано проф. Красовским в его книге «О тригонометрических сетях»; а посему изложение и вывод основных формул для вероятнейших значений координат уединенной точки мною частью заимствованы у выше поименованного автора. Самый же метод графического нахождения координат уединенной точки, который дает результат по точности не уступающий аналитическому решению, разработан мною лично.

г. Екатеринбург.
1921 г.

Пункты, определяемые каждый в отдельности засечками относительно точек основных сетей (высших разрядов), называются уединенными. Если число наблюдений с точек основных сетей больше числа необходимых для нахождения координат уединенной точки, то полученный через измерение материал дает возможность обработки результатов измерения по способу наименьших квадратов, что в итоге повышает точность определяемых координат уединенной точки и дает возможность оценки полученных через уравнивание результатов наблюдений. При определении уединенной точки в зависимости от положения наблюдателя возможны два случая: первый, когда положение уединенной точки определяется из наблюдений с основных пунктов сети и при числе пунктов наблюдений более двух, для вероятнейших значений координат уединенной точки имеется $n-2$ избыточных наблюдений, если n число пунктов, с которых производились наблюдения, и, второе, когда положение пункта определяется из наблюдений на определяемом пункте по точкам основной сети

(задача Потенота), то нахождение вероятнейших значений координат возможно из $n-3$ избыточных наблюдений. Аналитическое решение поставленной задачи, т. е. определение вероятнейших значений координат уединенной точки, вследствие сложности коэффициентов условных уравнений требует большой утомительной работы и не избавляет вычислителя от возможных промахов. Графические методы нахождения вероятнейших значений координат уединенной точки дают возможность свести до минимума вычисления, заменив их геометрическими построениями, при чем в руках лица умеющего обращаться с чертежными инструментами, получаются результаты несколько не уступающие по точности данным из аналитического решения.

В основу точного уравнивания уединенной точки графическим путем кладутся следующие теоретические соображения: пусть на чертеже 1-м Р уединенная точка, на которую измерены углы $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ с пунктов N_1, N_2, \dots, N_n основной сети, координаты которых $X_1Y_1, X_2Y_2, \dots, X_nY_n$ даны; по измеренным углам $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ и азимутам сторон $N_1N_2, N_2N_3, \dots, N_{n-1}N_n$ вычисляются азимуты сторон на уединенную точку $\alpha_1'', \alpha_2'', \dots, \alpha_n''$, которые и называются наблюдаемыми, если через A_1, A_2, \dots, A_n обозначим азимуты на вероятнейшее положение уединенной точки, то должны иметь:

$$(1) \dots \dots \begin{cases} A_1 = \alpha_1'' \\ A_2 = \alpha_2'' \\ \dots \\ A_n = \alpha_n'' \end{cases}$$

но вследствие случайных ошибок наблюдений, входящих в азимуты $\alpha_1'', \alpha_2'', \dots, \alpha_n''$, через наблюдаемые углы $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ вышеозначенные равенства не имеют места и примут такой вид:

$$(2) \dots \dots \begin{cases} \alpha_1'' + V_1 = A_1 \\ \alpha_2'' + V_2 = A_2 \\ \dots \\ \alpha_n'' + V_n = A_n \end{cases}$$

если через V_1, V_2, \dots, V_n обозначим поправки к наблюдаемым азимутам. Так как поправки $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ различны по величине и знакам, то направления с наблюдаемыми азимутами $\alpha_1'', \alpha_2'', \dots, \alpha_n''$ не пересекутся в искомой точке Р, что при построении на бумаге даст $\frac{n(n-1)}{1.2}$ точек пересечения и, следова-

тельно, возможность нахождения графическим путем вероятнейших значений координат уединенной точки. Обозначив координаты точки Р через X_0Y_0 и взяв точку М как пересечение любой пары направлений, например N_4n^V и N_5n^V , получим из решения треугольника N_4MN_5 по стороне N_4N_5 и углам β_4 и $\gamma = \alpha(N_5N_6) - \alpha(N_5N_4) - \beta_5$, координаты точки М (X_nY_n); очевидно

$$(3) \dots \dots \dots \begin{cases} X_p = X_m + \bar{z} \\ Y_p = Y_m + \eta \end{cases}$$

если через \bar{z} и η обозначим поправки к координатам точки М. Поправки \bar{z} и η к вероятнейшим значениям координат точки Р могут быть найдены следующим путем: по координатам основных точек сети $N_1 N_2, \dots N_n$ и точки М определим азимуты $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, которые назовем вычисленными; имеем

$$(4) \dots \dots \dots \begin{cases} \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{Y_m - Y_1}{X_m - X_1} \\ \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{Y_m - Y_2}{X_m - X_2} \\ \dots \dots \dots \\ \operatorname{tg} \alpha_n = \frac{Y_m - Y_n}{X_m - X_n} \end{cases}$$

откуда

$$(5) \dots \dots \dots \begin{cases} \alpha_1 = \operatorname{arctg} \frac{Y_m - Y_1}{X_m - X_1} \\ \alpha_2 = \operatorname{arctg} \frac{Y_m - Y_2}{X_m - X_2} \\ \dots \dots \dots \\ \alpha_n = \operatorname{arctg} \frac{Y_m - Y_n}{X_m - X_n} \end{cases}$$

Взяв из уравнений (5) одно из значений α , продифференцируем:

$$d\alpha_1 = \frac{\operatorname{darctg} \frac{Y_m - Y_1}{X_m - X_1}}{dx_m} dx + \frac{\operatorname{darctg} \frac{Y_m - Y_1}{X_m - X_1}}{dy_m} dy$$

или

$$(6) \dots d\alpha_1 = \frac{1}{1 + \left(\frac{Y_m - Y_1}{X_m - X_1} \right)^2} \cdot \left(-\frac{Y_m - Y_1}{(X_m - X_1)^2} \right) dx + \\ + \frac{1}{1 + \left(\frac{Y_m - Y_1}{X_m - X_1} \right)^2} \cdot \frac{1}{(X_m - X_1)} \cdot dy$$

Обозначив расстояния от точек $N_1, N_2, \dots N_n$ основной сети до точки М через $d_1, d_2, \dots d_n$ для стороны $N_1 M$ будем иметь:

$$\begin{aligned} Y_m - Y_1 &= d_1 \cos \alpha_1 \\ X_m - X_1 &= d_1 \sin \alpha_1 \end{aligned}$$

д Sin 1'' через q, получим:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{p_1} \cos \alpha_1 \eta - \sqrt{p_1} \sin \alpha_1 \xi - \sqrt{p_1} q_1 = v_1 \sqrt{p_1} d_1 \sin l'' \\ \sqrt{p_2} \cos \alpha_2 \eta - \sqrt{p_2} \sin \alpha_2 \xi - \sqrt{p_2} q_2 = v_2 \sqrt{p_2} d_2 \sin l'' \\ \sqrt{p_3} \cos \alpha_3 \eta - \sqrt{p_3} \sin \alpha_3 \xi - \sqrt{p_3} q_3 = v_3 \sqrt{p_3} d_3 \sin l'' \\ \vdots \\ \sqrt{p_n} \cos \alpha_n \eta - \sqrt{p_n} \sin \alpha_n \xi - \sqrt{p_n} q_n = v_n \sqrt{p_n} d_n \sin l'' \end{array} \right.$$

$$(\nu_1 \sqrt{p_1} d_1 \sin 1'')^2 + (\nu_2 \sqrt{p_2} d_2 \sin 1'')^2 + (\nu_3 \sqrt{p_3} d_3 \sin 1'')^2 + \dots + (\nu_n \sqrt{p_n} d_n \sin 1'')^2 = \text{Minimum, получим следующие нор-}$$

$$(12) \quad \dots \quad [p \cos^2 \alpha] \cdot \eta - [p \sin \alpha \cdot \cos \alpha] \bar{\zeta} = [pq \cos \alpha] \\ - [p \sin \alpha \cos \alpha] \eta + [p \sin^2 \alpha] \bar{\zeta} = -[pq \sin \alpha]$$

$$.13) \quad \dots \quad \xi = - \frac{[pq \sin \alpha] \cdot [p \cos^2 \alpha] - [pq \cos \alpha] \cdot [p \sin \alpha \cos \alpha]}{[p \cos^2 \alpha] \cdot [p \sin^2 \alpha] - [p \sin \alpha \cdot \cos \alpha]^2}$$

$$(14) \quad \dots \eta = \frac{[pq \cos \alpha] \cdot [p \sin^2 \alpha] - [pq \sin \alpha] \cdot [p \sin \alpha \cdot \cos \alpha]}{[p \cos^2 \alpha] \cdot [p \sin^2 \alpha] - [p \sin \alpha \cdot \cos \alpha]^2}$$

$$\begin{aligned} & [pq \sin \alpha] [p \cos^2 \alpha] - [pq \cos \alpha] [p \sin \alpha \cdot \cos \alpha] = \{p_1 p_2 \sin (\alpha_1 - \alpha_2)\} \cdot \\ & \cdot \{q_1 \cos \alpha_2 - q_2 \cos \alpha_1\} + \{p_1 p_3 \sin (\alpha_1 - \alpha_3)\} \cdot \{d_1 \cos \alpha_3 - q_3 \cos \alpha_1\} + \\ & \dots + \{p_1 p_n \sin (\alpha_1 - \alpha_n)\} \cdot \{q_1 \cos \alpha_n - q_n \cos \alpha_1\} + \{p_2 p_3 \sin (\alpha_2 - \alpha_3)\} \cdot \\ & \cdot \{q_2 \cos \alpha_3 - q_3 \cos \alpha_2\} + \dots + \{p_s p_t \sin (\alpha_s - \alpha_t)\} \cdot \{q_s \cos \alpha_t - q_t \cos \alpha_s\} + \dots \end{aligned}$$
$$\begin{aligned}
& [pq \cos \alpha] [p \sin^2 \alpha] - [pq \sin \alpha] [p \sin \alpha \cos \alpha] = \{ p_1 p_2 \sin (\alpha_2 - \alpha_1) \} \cdot \\
& \cdot \{ q_1 \sin \alpha_2 - q_2 \sin \alpha_1 \} + \{ p_1 p_3 \sin (\alpha_3 - \alpha_1) \} \{ q_1 \sin \alpha_3 - q_3 \sin \alpha_1 \} + \cdot \\
& \cdot + \{ p_1 p_4 \sin (\alpha_n - \alpha_1) \} \{ q_1 \sin \alpha_n - q_n \sin \alpha_1 \} + \{ p_2 p_3 \sin (\alpha_3 - \alpha_1) \} \cdot \\
& \cdot \{ q_2 \sin \alpha_3 - q_3 \sin \alpha_2 \} + \cdot + \{ p_s p_t \sin (\alpha_t - \alpha_s) \} \cdot \{ q_s \sin \alpha_t - q_t \sin \alpha_s \} + \cdot
\end{aligned}$$
$$[p \sin^2 \alpha] [p \cos^2 \alpha] - [p \sin \alpha_1 \cos \alpha]^2 = p_1 p_2 \sin^2 (\alpha_1 - \alpha_2) + \dots + p_1 p_3 \sin^2 (\alpha_1 - \alpha_3) + \dots + p_s p_t \sin^2 (\alpha_s - \alpha_t) + \dots$$

Заменяя числители и знаменатели уравнений (13) и (14) полученными выражениями, имеем

$$(15) \quad \bar{\xi} = - \frac{\sum p_s p_t \sin(\alpha_s - \alpha_t) \cdot (q_s \cos \alpha_t - q_t \cos \alpha_s)}{\sum p_s p_t \sin^2(\alpha_s - \alpha_t)}$$

$$(16) \quad \eta = \frac{\sum p_s p_t \sin(\alpha_t - \alpha_s) \cdot q_s \sin \alpha_t - q_t \sin \alpha_s}{\sum p_s p_t \sin^2(\alpha_s - \alpha_t)}$$

Если из всех наблюдаемых направлений возьмем два любых направления, например: N_s и N_t , то в пересечении их получим точку номера (s, t) ; абсцисса X_{st} и ордината Y_{st} , которые определятся из решения двух соответствующих уравнений:

$$(17) \quad \begin{cases} \cos \alpha_s y_{st} - \sin \alpha_s x_{st} = q_s \\ \cos \alpha_t y_{st} - \sin \alpha_t x_{st} = q_t \end{cases}$$

откуда

$$(18) \quad \begin{cases} x_{st} = \frac{q_s \cos \alpha_t - q_t \cos \alpha_s}{\sin(\alpha_t - \alpha_s)} \\ y_{st} = \frac{q_s \sin \alpha_t - q_t \sin \alpha_s}{\sin(\alpha_t - \alpha_s)} \end{cases}$$

Очевидно полученные координаты точки пересечения (S, t) отнесутся к системе координатных осей, за начало которых принята точка M . Преобразуя выражение (18), имеем

$$\begin{aligned} x_{st} \cdot \sin(\alpha_t - \alpha_s) &= q_s \cos \alpha_t - q_t \cos \alpha_s \\ y_{st} \cdot \sin(\alpha_t - \alpha_s) &= q_s \sin \alpha_t - q_t \sin \alpha_s \end{aligned}$$

Делая подстановку в выражения (15) и (16) и вынося минус за знаки Sinus'a и суммы, получим

$$(19) \quad \begin{cases} \bar{\xi} = \frac{\sum p_s p_t \sin^2(\alpha_s - \alpha_t) X_{s,t}}{\sum p_s p_t \sin^2(\alpha_s - \alpha_t)} \\ \eta = \frac{\sum p_s p_t \sin^2(\alpha_s - \alpha_t) Y_{st}}{\sum p_s p_t \sin^2(\alpha_s - \alpha_t)} \end{cases}$$

Из формулы (19) очевидно, что поправки $\bar{\xi}$ и η , во первых, ни что иное, как средние арифметическое из абсцисс и ординат точек пересечения, полученных из построения на чертеже наблюдаемых направлений, веса пересечений которых равны $p_1 p_2 \sin^2(\alpha_1 - \alpha_2), \dots, p_s p_t \sin^2(\alpha_s - \alpha_t), \dots, p_1 p_n \sin^2(\alpha_1 - \alpha_n), \dots$, и, во вторых, — координаты точки P , если за начало координат принята точка M .

Обозначив веса буквой P и прописав им соответствующие знаки направлений, в пересечении которых получилась данная точка с весом P , будем иметь, что

$$(20) \quad \begin{cases} \xi = \frac{P_{1,2} x_{1,2} + P_{1,3} x_{1,3} + \dots + P_{1,n} x_{1,n} + P_{2,3} x_{2,3} + \dots}{P_{1,2} + P_{1,3} + \dots + P_{1,n} + P_{2,3} + \dots} \\ \eta = \frac{P_{1,2} y_{1,2} + P_{1,3} y_{1,3} + \dots + P_{1,n} y_{1,n} + P_{2,3} y_{2,3} + \dots}{P_{1,2} + P_{1,3} + \dots + P_{1,n} + P_{2,3} + \dots} \end{cases}$$

Делая подстановку в равенства (3) полученных поправок ξ и η имеем окончательные выражения для вероятнейших значений координат уединенной точки

$$(21) \quad \begin{cases} x_p = x_m + \frac{P_{1,2} x_{1,2} + P_{1,3} x_{1,3} + \dots + P_{1,n} x_{1,n} + P_{2,3} x_{2,3} + \dots}{P_{1,2} + P_{1,3} + \dots + P_{1,n} + P_{2,3} + \dots} \\ y_p = y_m + \frac{P_{1,2} y_{1,2} + P_{1,3} y_{1,3} + \dots + P_{1,n} y_{1,n} + P_{2,3} y_{2,3} + \dots}{P_{1,2} + P_{1,3} + \dots + P_{1,n} + P_{2,3} + \dots} \end{cases}$$

Средние ошибки m_x и m_y координат x_p и y_p точки P найдутся по средней ошибке, соответствующей единице веса и по весам P_ξ и P_η поправок ξ и η . Длина перпендикуляра опущенного из точки P с координатами равными поправкам ξ и η на прямую, уравнение которой

$$py \cos \alpha - px \sin \alpha - pq = 0$$

выражается

$$l = p_\eta \cdot \cos \alpha - p_\xi \cdot \sin \alpha - p \cdot q$$

но из уравнений (10) очевидно, что $l = vpsinl''$, т.-е. длины перпендикуляров опущенных из точки P равны поправкам свободных членов начальных уравнений, а потому средне квадратическая ошибка соответствующая единице веса выразится

$$(22) \quad \dots \dots \dots m = \pm \sqrt{\frac{[pl^2]}{n-2}}$$

Веса поправок ξ и η — P_ξ и P_η определяются при решении нормальных уравнений

$$P_\xi = [p \sin^2 \alpha] - \frac{[p \sin \alpha \cdot \cos \alpha]^2}{[p \cos^2 \alpha]}$$

$$P_\eta = [p \cos^2 \alpha] - \frac{[p \sin \alpha \cdot \cos \alpha]^2}{[p \sin^2 \alpha]}$$

или

$$(23) \quad \begin{cases} P_\xi = \frac{[p \sin^2 \alpha] [p \cos^2 \alpha] - [p \sin \alpha \cdot \cos \alpha]^2}{[p \cos^2 \alpha]} = \frac{[P]}{[p \cdot \cos^2 \alpha]} \\ P_\eta = \frac{[p \cos^2 \alpha] [p \sin^2 \alpha] - [p \sin \alpha \cos \alpha]^2}{[p \sin^2 \alpha]} = \frac{[P]}{[p \sin^2 \alpha]} \end{cases}$$

Следовательно, средние квадратические ошибки m_x и m_y координат точки Р будут.

$$(24) \dots m_x = \mp \frac{m}{\sqrt{P_\beta}} \text{ и } m_y = \pm \frac{m}{\sqrt{P_\gamma}}$$

Представим себе систему материальных точек тела, находящегося в плоскости x и y с сосредоточенными в этих точках весами p_1, p_2, \dots, p_n ; координаты центра тяжести, являющейся центром параллельных сил $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ выразятся известными в механике формулами

$$(25) \dots \begin{cases} x_T = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n} \\ y_T = \frac{p_1 y_1 + p_2 y_2 + p_3 y_3 + \dots + p_n y_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n} \end{cases}$$

где $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots, x_n, y_n$ — координаты точек приложения сил. Формулы (25) очевидно совершенно аналогичны формулам (20), а по сему поправки β и γ к координатам x_m, y_m точки М, дающие возможность нахождения вероятнейших значений координат точки Р, суть координаты центра тяжести точек пересечения наблюдаемых направлений имеющих веса $P_{1,2}, P_{1,3}, \dots, P_{1,n}, P_{2,3}, \dots$, которые прямо пропорциональны квадратам \sin углов между направлениями и весами соответствующих нормальных уравнений. Следовательно, весь вопрос графического уравнивания уединенной точки сводится к графическому нахождению центра тяжести, а таким из всех наиболее удобных является применяемый в графической статике метод нахождения центра тяжести помощью силового многоугольника или многоугольника Вариньона. Для нахождения таким путем центра тяжести построим чертеж 3-й следующим образом: решим треугольники $N_1 P N_2, N_2 P N_3, N_3 P N_4 \dots$ и т. д. чертеж 1-й, и определим два раза каждую общую сторону $N_2 P, N_3 P, N_4 P, \dots$ входящую в два смежных треугольника; очевидно, что отрезки (1,2) — (2,3), (2,3) — (3,4) представляют собою разности сторон двух смежных треугольников. По полученным из вычисления треугольников разностям сторон и азимутам, строим на бумаге в крупном масштабе чертеж так, чтобы, выбрав одну из точек пересечения за начало координат, все построение могло бы уместиться на одном листе; на чертеже 3-ем за такую точку принято пересечение (1,2) направлений $N_1 . 1$ и $N_2 . 2$. Через начальную точку (1,2) проводим направления под азимутами α_1 , и α_2 и на последнем откладываем отрезки (1,2) — (2,3) в ту или иную сторону в зависимости от того, какая из двух смежных сторон треугольников $N_1 P N_2$ и $N_2 P N_3$ длиннее; получаем точку пересечения (2,3). Через полученную точку (2,3) проводим направление под азимутом α_3 и откладываем по полученной линии

от точки (2.3) отрезок (2.3) — (3.4) имеем точку (3.4), в пересечении с направлением азимута α , получим точку (1.3); через точку (3.4) проводим направление под азимутом α_4 , получаем в пересечении с направлениями под азимутами α_1 и α_2 точки (1.4) и (2.4) и т. д., действуя до тех пор, пока не будут проведены все наблюдаемые направления и не получены все точки пересечений.

После построения чертежа находим веса пересечений по формуле $P_{s,t} = p_s p_t \sin^2(\alpha_s - \alpha_t)$, где $p_s = \frac{1}{D_s^2}$ и $p_t = \frac{1}{D_t^2}$, при чем D_s и D_t суть расстояния точки пересечения (s.t) от пунктов основной сети N_s и N_t , а $(\alpha_s - \alpha_t)$ — разность соответствующих азимутов или угол при точке (s.t). Расстояние D_s и D_t найдутся из вычисления сторон треугольников, предшествующих построению чертежа, а угол — как разность азимутов или графически с чертежа помощью транспортира. Принимая за единицу вес равный расстоянию в 1000 metr. (саж.) получим $d_s = \frac{D_s}{1000}$ и $d_t = \frac{D_t}{1000}$. Для нахождения весов удобно воспользоваться ниже следующей диаграммой; для чего предварительно формулу

$$P_{st} = \frac{1}{d_s^2} \cdot \frac{1}{d_t^2} \cdot \sin^2(\alpha_s - \alpha_t)$$

представим в таком виде:

$$P_{s,t} = \left\{ \frac{1}{d_s^2} \sin(\alpha_s - \alpha_t) \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{d_t^2} \sin(\alpha_s - \alpha_t) \right\}$$

в выражении $k_s = \frac{1}{d_s^2} \sin(\alpha_s - \alpha_t)$ величине $(\alpha_s - \alpha_t)$ дадим значения $0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, \dots, 90^\circ$ при постоянном d_s получим $k'_s, k''_s, k'''_s, \dots, k^{(n)}_s$; изменив d_s на d_e и, давая при новой постоянной d_e величине $(\alpha_s - \alpha_t)$ те же значения, получим ряд $k'_e, k''_e, k'''_e, \dots, k^{(n)}_e$ и, поступая так далее получим прилагаемую в конце таблицу, облегчающую построение диаграммы. Самое построение диаграммы произведем следующим образом: на бумаге с мелкими делениями (например, профильной) по горизонтальной линии отложим значения $\sin(\alpha_s - \alpha_t)$ от 0° до 90° через 5° , на вертикальных в том или ином масштабе величины k , вычисленные для различных значений d ; полученные точки соединим линиями, получим ряд лучевых прямых и, приписав к соответствующим лучам расстояния d в тысячах метров (сажених), получим прилагаемую ниже диаграмму весов.

Для пояснения пользования диаграммой весов возьмем числовой пример: пусть точка (2.5), полученная пересечением на-

правлений (2) и (5) с углом при точке (2.5) в $45^\circ 30'$ и длиной визирных лучей $D_2 = 300$ саж. и $D_5 = 700$ саж.; по диаграмме весов ищем для $d_2 = 0.3$ и $(\alpha_2 - \alpha_5) = 45^\circ 30'$, получим $k_2 = 7.9$ и для $d_5 = 0.7$ и $(\alpha_2 - \alpha_1) = 45^\circ 30'$; $k_5 = 1.45$. Перемножением k_2 на k_5 имеем что $P_{2,5} = 11,5$; непосредственное вычисление дает для $P_{2,5} = 11.5$, что вполне согласуется с результатом найденным по диаграмме.

Примечание. Для удобства пользования диаграммой возможно d увеличивать или уменьшать, соответственно в квадрат раз уменьшая или увеличивая получаемый по диаграмме результат, что очевидно из формулы

$$k = \frac{1}{d^2} \sin (\alpha_s - \alpha_t)$$

По нахождении весов всех пересечений, перейдем к отысканию вероятнейших поправок ξ и η , для чего, как было выше сказано, воспользуемся многоугольником Вариньона. Пусть точки пересечений направлений 1, 2, 3, 4 на черт. 3 суть (1.2), (1.3), (1.4), ... (3.4) с весами $P_{1,2}$, $P_{1,3}$, $P_{1,4}$... $P_{3,4}$. Считая направление сил $P_{1,2}$, $P_{1,3}$, ... $P_{3,4}$ параллельным оси X-ов, строим многоугольник сил*), для чего на линии АВ параллельной оси X-в откладываем от произвольно взятой точки С силы $P_{2,3}$, $P_{2,4}$, ... $P_{1,4}$ в удобном для построения чертежа масштабе и в таком порядке, в каком на чертеже идут точки пересечения направлений слева направо. Отложив силы на линии АВ берем точку О, соединяя полюс О с точками Е, F, К, ... получаем многоугольник сил; после чего проводим через точки (1.4), (1.3), ... (2.3) прямые параллельные оси X-ов и, беря на (1.4) произвольную точку S, проводим прямые параллельные лучами α_7 и α_6 ; в пересечении прямой α_6 с линией (1.3) имеем точку d, через которую проводим линию параллельную лучу α_5 до пересечения с (3.4), и т. д. в результате этих построений получаем N, a, b, c, d, S - многоугольник Вариньона. Продолжая α_1 и α_7 до взаимного пересечения, имеем точку R, через которую проводим прямую параллельную оси X. На прямой, как на равнодействующей всех параллельных сил $P_{1,2}$, $P_{1,3}$, ... $P_{3,4}$, лежит центр тяжести. Для нахождения его на оси тяжести пользуемся теоремой статики, по которой точка приложения равнодействующей параллельных сил не изменится, если изменить направление параллельных сил, оставляя неизменными их точки приложения.

Пользуясь приведенной теоремой, изменим направление сил $P_{1,2}$, $P_{1,3}$... $P_{3,4}$ так чтобы направление их было параллельно оси Y-ов и опять приложив силы $P_{1,2}$, $P_{1,3}$, ... $P_{1,4}$ соответствующим точкам пересечений (1.2), (1.3) ... (2.3) ... подобным же построением найдем вторую ось тяжести, проходящую через точ-

*) В. Л. Кирпичев „Основания графической статики“, стр. 34.

ку R' . Полученные на чертеже оси тяжестей R и R' пересекутся в точке P , которая и будет центром тяжести системы точек (1.2), (1.3), ... (3.4). Измерив длины опущенных перпендикуляров из найденной точки P на оси X -ов и Y -ов получим поправки ξ и η к координатам $X_{1..2}$ и $Y_{1..2}$, а следовательно и вероятнейшие значения координат X_p и Y_p уединенной точки по формуле (21)

$$\begin{aligned} X_p &= X_{1..2} + \xi \\ Y_p &= Y_{1..2} + \eta \end{aligned}$$

Средне квадратические ошибки координат уединенной точки определяется по формуле (24)

$$m_x = \pm \frac{m}{\sqrt{P_\xi}} \text{ и } m_y = \pm \frac{m}{\sqrt{P_\eta}},$$

где m средняя ошибка, соответствующая единице веса, а P_ξ и P_η веса поправок ξ и η . Средняя ошибка единицы веса найдется из формулы

$$m = \pm \sqrt{\frac{[pl^2]}{n-2}},$$

где l_1, l_2, l_3, \dots суть перпендикуляры, опущенные из точки P на направления (1.1), (2.2), (3.3), ... Длины этих перпендикуляров получатся непосредственным измерением на чертеже отрезков $P_{p1}, P_{p2}, P_{p3}, \dots$. Веса поправок P_ξ и P_η найдутся по формулам

$$P_\xi = \frac{[P]}{[p \cos^2 \alpha]} \text{ и } P_\eta = \frac{[P]}{[p \sin^2 \alpha]}$$

при чем $[P]$ найдется как отрезок CD (черт. 3-й), а $[p \cos^2 \alpha]$ и $[p \sin^2 \alpha]$ по диаграмме весов следующим образом: выражение $p \cos^2 \alpha$ представляет из себя произведение $p \sin (90 - \alpha) \cdot \sin (90 - \alpha)$, а $p \sin^2 \alpha = p \sin \alpha \cdot \sin \alpha$; $p \sin (90 - \alpha)$ и $p \sin \alpha$ найдутся по диаграмме, также как находится k , а $\sin (90 - \alpha)$ и $\sin \alpha$ — на горизонтальной линии диаграммы весов, т. к. при построении диаграммы на линии AB откладывались натуральные величины $\sin \alpha$ и $\sin (90 - \alpha)$.

В заключение необходимо сказать, что точность полученных результатов графическим уравниванием при условии тщательности выполнения чертежа и достаточной крупности масштаба не уступает такому же решению аналитическим путем. Для иллюстрации предлагаемого способа дается на последующих страницах два числовых примера.

Пример 1-й.)* При составлении тригонометрической сети на точку Р взяты засечки с трех основных пунктов, требуется определить вероятнейшие координаты точки Р. Координаты пунктов, логарифмы сторон и азимуты тригонометрической сети следующие:

№ пункт.	Координаты		Lg	Азимуты
	X	Y	Сторон	
⊙ 1	+ 500.31	— 4285.92		135° 34' 5"
⊙ 2	— 1139.21	— 2678.59		66° 57' 35"
⊙ 3	0.00	0.00		

Из чертежа 4, показывающего расположение пунктов, очевидно, что для определения пункта Р имеем два треугольника: 12Р и 23Р в которых известны логарифмы сторон, азимуты и наблюдаемые углы:

$$\angle I = 79^\circ 19' 41''$$

$$\angle II = 61^\circ 8' 10''$$

$$\angle III = 69^\circ 42' 28''$$

Из решения треугольников находим азимуты всех направлений и длины смежных сторон треугольников:

Направление сторон		Длины сторон	Из какого треугольн.	Азимуты
С пункта №№	На пункт			
⊙ 1	⊠ Р	2867.00	1 Р 2	61° 14'
⊙ 2		3151.94	1 Р 2	16° 42' 15"
⊙ 2		3151.38	2 Р 3	
⊙ 3		2583.40	2 Р 3	316° 40'

Азимуты направлений с пунктов 1 и 3 вычислены до минут, так как они необходимы только для построения чертежа. Зная длину стороны $\overline{2Р} = 3151.94$ и азимут $\overline{2Р} = 16^\circ 42' 15''$ вычисляем приближенные координаты точки Р пересечения (1.2) сторон 1.Р и 2Р

$$X_{1,2} = X_2 + \Delta X_2^P = +1879.76$$

$$Y_{1,2} = Y_2 + \Delta Y_2^P = -1772.63$$

*) Данные числового примера взяты из курса dr W. Jordan Hanbuch der Vermessungskunde t.I.

Строим чертеж 5-й—пересечения трех направлений в масштабе $\frac{1}{10}$, для чего выбираем на бумаге точку (1.2), но так, чтобы весь чертеж уместился на одном листе, и проводим через эту точку направления с пунктов 1 и 2 под азимутами $61^{\circ} 14'$ и $16^{\circ} 42'$. На направлении (2) откладываем расстояние равное разности сторон: $3151.38 - 3151.94 = -0.56$ mtr. и получаем точку (2.3) пересечения направлений (2) и (3). Через полученную точку (2.3) проводим направление с (3) под азимутом $316^{\circ} 40'$, в пересечении которого с направлением (1) получим точку (1.3). Построив чертеж всех точек пересечений, которых в данном примере будет три, так как число пересечений $= \frac{n(n-1)}{1.2}$, переходим к нахождению весов, для чего на чертеже измеряем транспортиром углы, образованные при точках пересечений и пользуясь диаграммой весов, получаем нижеследующую таблицу значений для P_{st}

Точка пересече- ний	Углы между направ- лениями	d расстоя- ния	Ks	Ps,t
⊙ 1.2	44	0.29	8.3	57.27
		0.32	6.9	
⊙ 1.3	75° 5	0.29	11.1	163.30
		0.26	14.2	
⊙ 2.3	60°	0.32	8.7	108.75
		0.26	12.5	
			[P] =	329.32

Переходим к отысканию поправок ξ и η к координатам $X_{1.2}$ и $Y_{1.2}$ помощью многоугольника Вариньона, для чего строим два многоугольника сил: один параллельно оси X-ов, другой параллельно оси Y-ов, в масштабе—в одном сантиметре 50 весовых единиц. Делая построение, как указано на 104 странице, находим в пересечении осей тяжестей точку Р. Измерением отрезков от точки Р до осей координат, получаем следующие значения поправок:

$$\xi = -0.320 \text{ metr.}$$

$$\eta = -0.274 \text{ metr.}$$

Но так как координаты пересечения (1.2) равны

$$X_{1.2} = +1879.76 \text{ и } Y_{1.2} = -1772.63$$

а поправки

$$z = -0.32 \text{ и } \gamma = -0.27$$

то окончательные величины координат уединенного пункта будут

$$\begin{aligned} X_P &= +1879.44 \\ Y_P &= -1772.90 \end{aligned}$$

Аналитическое решение*) для координат той же точки Р дает

$$\begin{aligned} X_P &= +1879.39 \\ Y_P &= -1772.93 \end{aligned}$$

результаты, как видно, достаточно согласные.

Для определения средней ошибки координат уединенной точки Р, находим вначале среднюю ошибку, соответствующую единице веса m , для чего измеряем расстояния от точки Р до всех трех направлений, имеем

Направление с пунктов	Расстояния l до направ- лен.	l^2	p	$p \cdot l^2$
⊙ 1	0.1346	0.018117	12.00	0.217404
⊙ 2	0.1730	0.029929	10.40	0.311262
⊙ 3	0.0770	0.005929	14.60	0.086563
			$[p] =$	0.615229

Значения p определены по соответствующим расстояниям l на вертикальной линии с надписью 90° диаграммы весов.

По формуле (22) имеем, что средняя ошибка соответствующая единице веса

$$m = \pm \sqrt{\frac{[p \cdot l^2]}{n-2}} = \pm 0.7844$$

Для нахождения весов поправок z и γ составим следующую таблицу

Направл с. пункт.	Расстоя- ние l	Азимут α	Pz			$P\gamma$		
			$p \cdot \sin (90-\alpha)$	$\sin (90-\alpha)$	$p \cdot \sin^2 (90-\alpha)$	$p \cdot \sin \alpha$	$\sin \alpha$	$p \cdot \sin^2 \alpha$
⊙ 1	0.29	$61^\circ 14'$	5.70	0.49	2.7930	10.40	0.87	9.0480
⊙ 2	0.32	$16^\circ 42'$	9.30	0.96	8.9280	2.67	0.28	0.7476
⊙ 3	0.26	$316^\circ 40'$	10.70	0.72	7.7040	10.10	0.68	6.8680
			$[p \cos^2 \alpha] = 19.4250$			$[p \sin^2 \alpha] = 16.6636$		

*) dr W. Jordan Handbuch der Vermesserkunde t. I. Стр. 379, издание 1920 г.

Значения $p \sin \alpha$, $\sin \alpha$, $p \sin (90 - \alpha)$, $\sin (90 - \alpha)$ найдены по той же диаграмме весов, как было уже указано на 105 странице.

По формуле определяем веса поправок ζ и η

$$P_{\zeta} = \frac{329.32}{19.43} = 16.92$$

$$P_{\eta} = \frac{329.32}{16.66} = 19.77$$

Следовательно, средне квадратические ошибки координат уединенной точки будут

$$m_x = \pm \frac{0.7844}{\sqrt{16.92}} = \pm 0.191$$

$$m_y = \pm \frac{0.7744}{\sqrt{19.77}} = \pm 0.176$$

А посему координаты уединенного пункта Р будут:

$$X_P = + 1879.44 \pm 0.19,$$

$$Y_P = - 1772.90 \pm 0.18.$$

Пример 2-й).* При составлении тригонометрической сети на точку Р взяты засечки с пяти основных пунктов, требуется определить вероятнейшие координаты точки Р.

Координаты пунктов, логарифмы сторон и азимуты тригонометрической сети следующие:

	Координаты		Log сторон	Азимуты
	Х	У		
⊙ 1	+ 579.91	- 1916.60	3.181792	65°57'37."8
⊙ 2	+ 1199.63	- 528.60	3.117397	156°12'34."1
⊙ 3	0.00	0.00	3.005594	212°5'31."3
⊙ 5	- 858.17	- 838.17		
⊙ 4	- 691.30	- 1201.02	3.163989	330°37'27."6

Из чертежа 6 показывающего расположение пунктов, очевидно, что для определения пункта Р имеем четыре треугольника 1.2.Р, 2.3.Р, 3.4.Р и 1.5.Р, в которых известны логарифмы сторон, азимуты и наблюдаемые углы:

*) Данные числового примера взяты из «Курса высшей геодезии» Бик-Иверонова. Часть III-я.

$$\begin{aligned}
 \angle I &= 4^{\circ} 7' 27''.7 \\
 \angle II &= 80^{\circ} 32' 22''.1 \\
 \angle III &= 48^{\circ} 31' 29''.0 \\
 \angle IV &= 41^{\circ} 13' 34''.7 \\
 \angle V &= 96^{\circ} 21' 41''.8 \\
 \angle VI &= 27^{\circ} 45' 21''.0 \\
 \angle VII &= 101^{\circ} 22' 53''.4 \\
 \angle VIII &= 92^{\circ} 15' 30''.8
 \end{aligned}$$

Из решения треугольников находим азимуты всех направлений и длины смежных сторон треугольников.

Направление сторон		Длина сторон	Из какого треугольн.	Азимуты
С пункта №№	На пункт			
⊙ 1	P	1466.58	1.2.P	145°30'
⊙ 1		1466.74	1.4.P	
⊙ 2		1930.90	2.3.P	197°26'
⊙ 2		1930.80	1.2.P	
⊙ 3		1280.30	3.5.P	239°50'52''.3
⊙ 3		1280.41	2.3.P	
⊙ 4		105.63	3.5.P	62°53'
⊙ 5		608.20	1.4.P	290°43'

Азимут направлений 1, 2, 3 и 5 вычислены до минут, так как они необходимы только для построения чертежа. Зная длину стороны $\overline{3P} = 1280.30$, и азимут $3P = 239^{\circ} 50' 52''.2$, вычисляем приближенные значения координат точки P пересечения (3.5) сторон $\overline{3P}$ и $\overline{5P}$.

$$\begin{aligned}
 X_{3.5} &= X_3 + \Delta X_3^P = -643.09 \\
 Y_{3.5} &= Y_3 + \Delta Y_3^P = -1107.07
 \end{aligned}$$

Строим чертеж 7-й пересечений пяти направлений в масштабе $\frac{1}{5}$, для чего выбираем на бумаге точку (3.5), но так,

чтобы весь чертеж уместился на одном листе и проводим через эту точку направления (3) и (5) под азимутами $239^{\circ}51'$ и $290^{\circ}43'$. На направлении (3) откладываем отрезок равный разности сторон $1280_{.41} - 1280_{.30} = +0.11$ mtr., получаем точку (2.3) пересечения направлений 2 и 3. Через полученную точку (2.3) проводим направление 2 под азимутом $197^{\circ}26'$, на котором откладываем отрезок $1930_{.80} - 1930_{.90} = -0.10$ mtr, получаем точку пересечения (1.2) и в пересечении с направлением 5 точку (2.5). Через точку (1.2) проводим направление 1 под азимутом $145^{\circ}30'$, дающую в пересечении с направлениями 5 и 3 точки (1.5) и (1.3). На построенном направлении откладываем разности сторон $1466_{.74} - 1466_{.58} = +0.16$ mtr., имеем точку (1.4), через нее проводим направление 4 с азимутом $62^{\circ}53'$, в пересечении которой с направлениями 5, 2 и 3 получаем точки (4.5), (2.4) и (3.4). Точку пересечения (3.4), как полученную под очень острой засечкой можно отбросить. Построив таким образом чертеж точек пересечений, находим их веса. Для чего измеряем на чертеже транспортиром углы, образованные при точках пересечений и пользуясь диаграммой весов, получаем нижеследующую таблицу значений для P_{st} .

Точки пересе- чений	Углы между направ- лениями	d расстоя- ние	K_s	P_{st}
⊙ 1.2	51°	1.5 1.9	0.40 0.13	0.06
⊙ 1.3	87°	1.5 1.3	0.45 0.60	0.27
⊙ 1.4	$83^{\circ}.5$	1.5 0.1	0.45 96.00	43.20
⊙ 1.5	36°	1.5 0.6	0.27 1.60	0.33
⊙ 2.3	$42^{\circ}.5$	1.9 1.3	0.18 0.40	0.07
⊙ 2.4	$45^{\circ}.5$	1.9 0.1	0.20 70.00	14.00
⊙ 2.5	87°	1.9 0.6	0.25 2.75	0.69
⊙ 3.5	51°	1.3 0.6	0.45 2.15	0.96
⊙ 4.5	48°	0.1 0.6	70.00 2.00	140.00
			[P] =	193.58

Переходим к отысканию поправок ξ и η к координатам $X_{3.5}$ и $Y_{3.5}$ помощью многоугольника Вариньона, для чего строим два многоугольника сил, один параллельно оси X-ов, другой—оси Y-ов в масштабе—в одном сантиметре 25 весовых единиц. Делая построения, как указано на странице 104, находим в пересечении осей тяжести точку Р. Измерением отрезков от точки Р до осей координат, получаем следующие значения поправок.

$$\xi = -0.064$$

$$\eta = +0.078$$

Но так как координаты пересечения (3.5)

$$X_{3.5} = -643.09 \quad \text{и} \quad Y_{3.5} = -1107.07$$

а поправки

$$\bar{\xi} = -0.06 \quad \text{и} \quad \eta = +0.08$$

то окончательные величины координат уединенной точки будут

$$X_P = -643.15$$

$$Y_P = -1106.99$$

т.-е. в точности одинаковые с результатами полученными аналитически.*)

Для определения средней ошибки координат уединенной точки Р находим вначале среднюю ошибку, соответствующую единице веса m , для чего измеряем расстояние от точки Р до всех пяти направлений и имеем:

Направ- ления	Расстояние l до направ- ления	l^2	p	pl^2
1	0.057	0.003249	0.45	0.0014621
2	0.167	0.027889	0.26	0.0072511
3	0.096	0.009216	0.62	0.0057139
4	0.000	0.000000	100.00	0.0000000
5	0.034	0.001156	2.78	0.0032137
			$ pl^2 =$	0.0176408

Значения Р были найдены по соответствующим расстояниям d на вертикальной линии с надписью 90° диаграммы весов. По формуле (22) имеем, что средняя ошибка, соответствующая единице веса:

*) Бик-Иверонов „Нисная геодезия“. часть 3-я. § 86, страница 230, издание 6-е.

$$m = \pm \sqrt[n-2]{[p^2]} = \pm \sqrt[3]{\frac{0.0176408}{3}} = 0.0767$$

Для нахождения весов поправок ξ и η составим следующую таблицу:

Направление	Расстояние d	Азимут α	P ξ			P η		
			p.Sin (90— α)	Sin (90— α)	p.Sin ² (90— α)	p Sin α	Sin α	p Sin ² α
1	1.5	145°	0.35	0.82	0.2870	0.25	0.57	0.1425
2	1.9	197° 5'	0.21	0.95	0.1995	0.07	0.31	0.0217
3	1.3	240°	0.30	0.50	0.1500	0.53	0.87	0.4611
4	0.1	63°	45.00	0.45	20.2500	90.00	0.89	80.1000
5	0.6	291°	0.96	0.36	0.3456	2.58	0.94	2.4252
			[p Cos ² α] =		21.2321	[p Sin ² α] =		83.1505

Значения $p \cdot \sin(90 - \alpha)$, $\sin(90 - \alpha)$, $p \sin \alpha$, $\sin \alpha$ найдены по той же диаграмме весов по методу, указанному выше на странице.

По формуле (23) определяем веса поправок ξ и η

$$P\xi = \frac{199.58}{21.23} = 9.40$$

$$P\eta = \frac{199.58}{83.15} = 2.40$$

Следовательно, средние квадратические ошибки координат уединенной точки P будут:

$$m_x = \pm \frac{0.0767}{\sqrt{9.40}} = \pm 0.0249$$

$$m_y = \pm \frac{0.0767}{\sqrt{2.40}} = \pm 0.049$$

а посему и координаты уединенной точки P будут:

$$X_P = -643.15 \pm 0.02$$

$$Y_P = -1106.99 \pm 0.05$$

Из рассмотрения на чертеже положения точки P, найденной графическим уравниванием, очевидно, что назначение точки «по усмотрению» не даст хорошего результата, так, как сообразуясь с чертежом пересечений, пришлось бы точку P назначить внутри треугольника (1.2) (2.4) (4.5).

<div> <div>D</div> <div>Углы</div> </div>	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	4.0	6.0	10.0
5°	0.97	0.54	0.35	0.24	0.18	0.14	0.11	0.09	0.06	0.04	0.03	0.03	0.02	0.00	0.00	0.00
10°	1.93	1.09	0.70	0.48	0.35	0.27	0.21	0.17	0.12	0.09	0.07	0.05	0.04	0.01	0.00	0.00
15°	2.88	1.62	1.04	0.72	0.53	0.40	0.32	0.26	0.18	0.15	0.10	0.08	0.06	0.01	0.01	0.00
20°	3.80	2.14	1.37	0.95	0.70	0.53	0.42	0.34	0.24	0.17	0.13	0.11	0.08	0.02	0.01	0.00
25°	4.70	2.64	1.69	1.18	0.86	0.66	0.52	0.42	0.30	0.21	0.16	0.13	0.11	0.02	0.01	0.00
30°	5.55	3.13	2.00	1.39	1.02	0.78	0.62	0.50	0.35	0.25	0.20	0.15	0.12	0.03	0.01	0.00
35°	6.38	3.59	2.30	1.60	1.17	0.89	0.71	0.57	0.40	0.29	0.22	0.18	0.14	0.03	0.02	0.01
40°	7.14	4.02	2.57	1.79	1.31	1.00	0.79	0.64	0.45	0.32	0.25	0.20	0.16	0.04	0.02	0.01
45°	7.85	4.42	2.83	1.96	1.44	1.10	0.87	0.71	0.49	0.36	0.28	0.22	0.18	0.04	0.02	0.01
50°	8.51	4.79	3.06	2.13	1.56	1.19	0.94	0.77	0.54	0.39	0.30	0.24	0.19	0.05	0.02	0.01
55°	9.10	5.12	3.28	2.28	1.67	1.28	1.01	0.82	0.57	0.42	0.32	0.25	0.20	0.05	0.02	0.01
60°	9.62	5.41	3.46	2.41	1.77	1.35	1.07	0.87	0.61	0.44	0.34	0.27	0.22	0.05	0.03	0.01
65°	10.07	5.66	3.62	2.52	1.85	1.41	1.11	0.91	0.63	0.46	0.35	0.28	0.23	0.05	0.03	0.01
70°	10.44	5.87	3.76	2.61	1.92	1.47	1.16	0.94	0.66	0.48	0.37	0.29	0.23	0.06	0.03	0.01
75°	10.73	6.04	3.86	2.68	1.97	1.51	1.19	0.97	0.68	0.49	0.38	0.30	0.24	0.06	0.03	0.01
80°	10.94	6.15	3.94	2.74	2.01	1.54	1.21	0.98	0.69	0.50	0.38	0.30	0.25	0.06	0.03	0.01
85°	11.07	6.22	3.98	2.77	2.03	1.55	1.23	1.00	0.70	0.51	0.39	0.31	0.25	0.06	0.03	0.01
90°	11.11	6.25	4.00	2.78	2.04	1.56	1.23	1.00	0.70	0.51	0.39	0.31	0.25	0.06	0.03	0.01

Ф. Павлов.

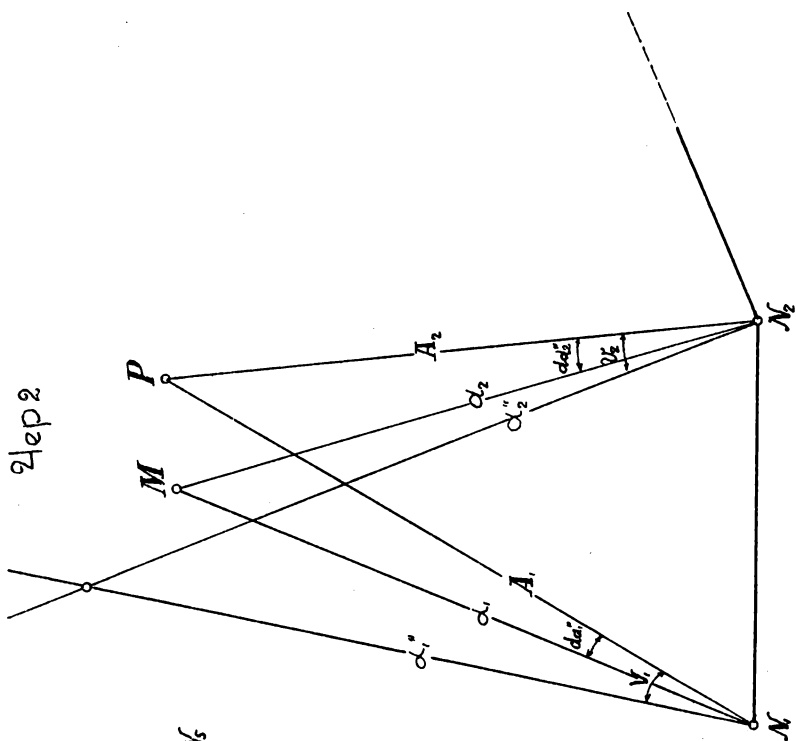
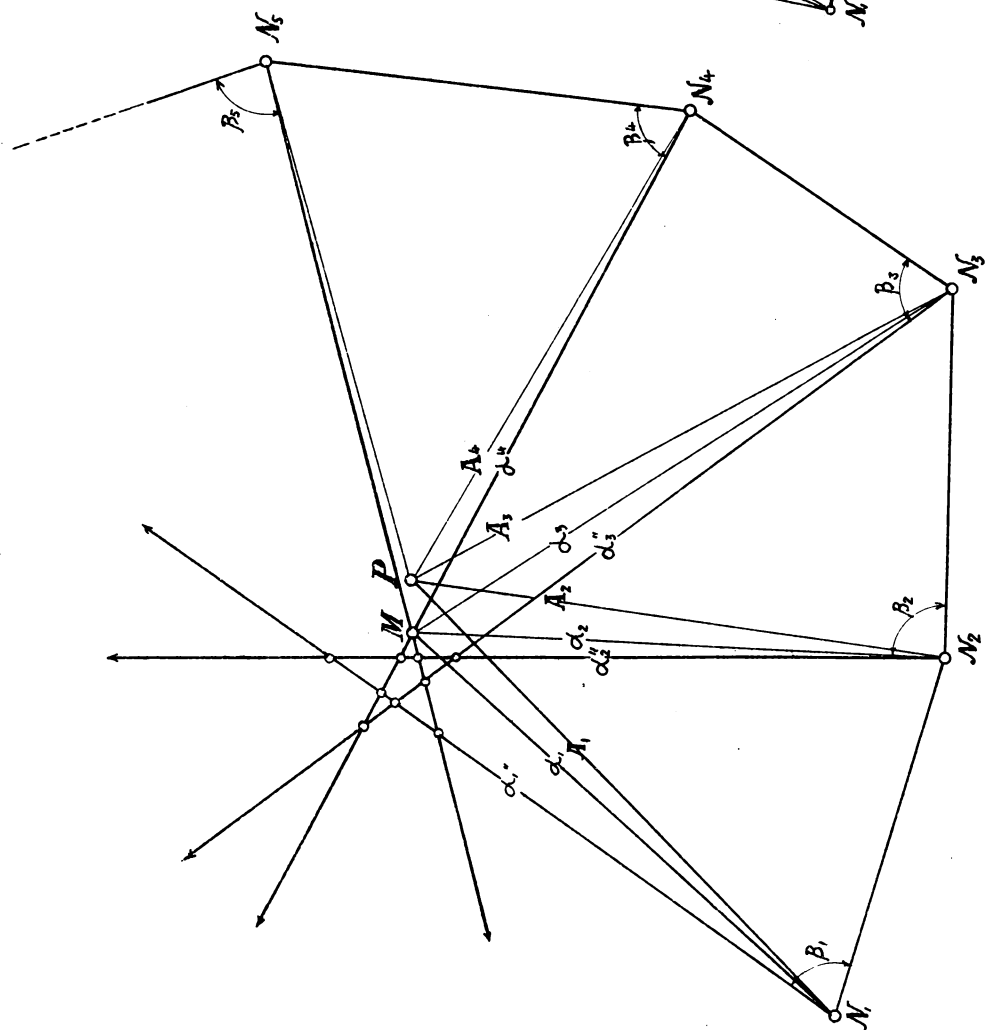
Th. Pawlow.

Die Anwendung der graphostatik zur Auflösung der Aufgabe der vielfachen Vorwärts nud Rückwärtseinschneiden.

Der Verfasser der obendargelegten Abhandlung berührt eine bekannte Aufgabe der vielfachen Vorwärts und Rückwärtseinschneiden mit folgenden graphischen Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Das Wesen der angebotenen graphischen Ausgleichungsmethode besteht in der Ausnutzung der bekannten graphostatischen Theorem von Warignon. Vorläufig bestimmt man die gewichte der Schneidepunkte je zwei genommenen Richtungen wofür benutzt Verfasser die besondere Diagramme und dann zur Bestimmung des Gewichts nud der Koordinaten des Eckpunkte wendet Verfasser obengenannte Warignonstheorem an. Die Genauigkeits der vorgeschlagenen Methode stimmt sehr gut mit Endresalaten der ziemlich mühsamen und unberguemen Analytischen Methode an, doch ist kurz nud einfach.

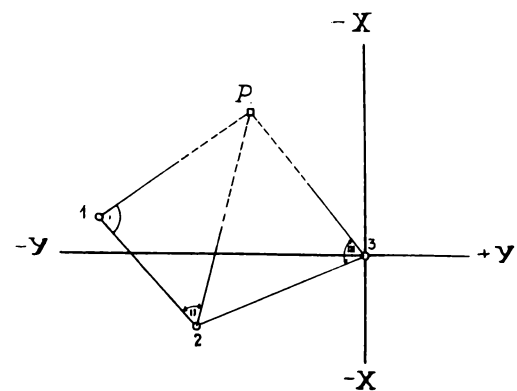
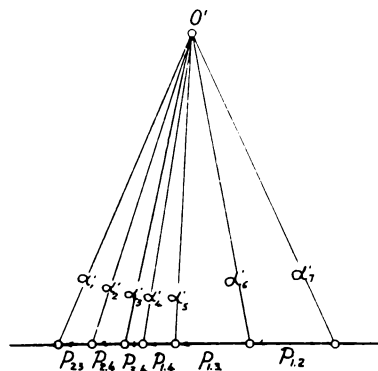
Th. Pawlow.

2/ep. 1²

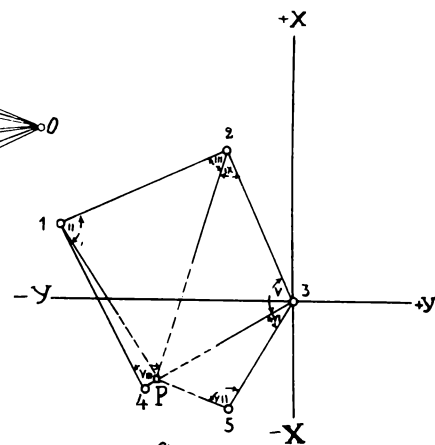
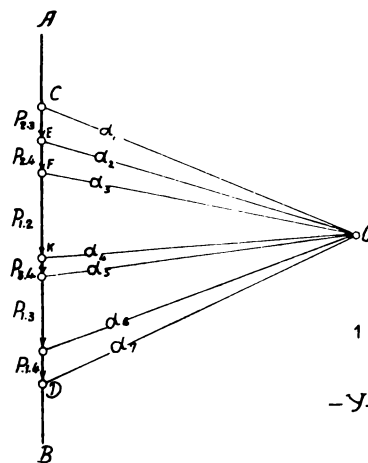
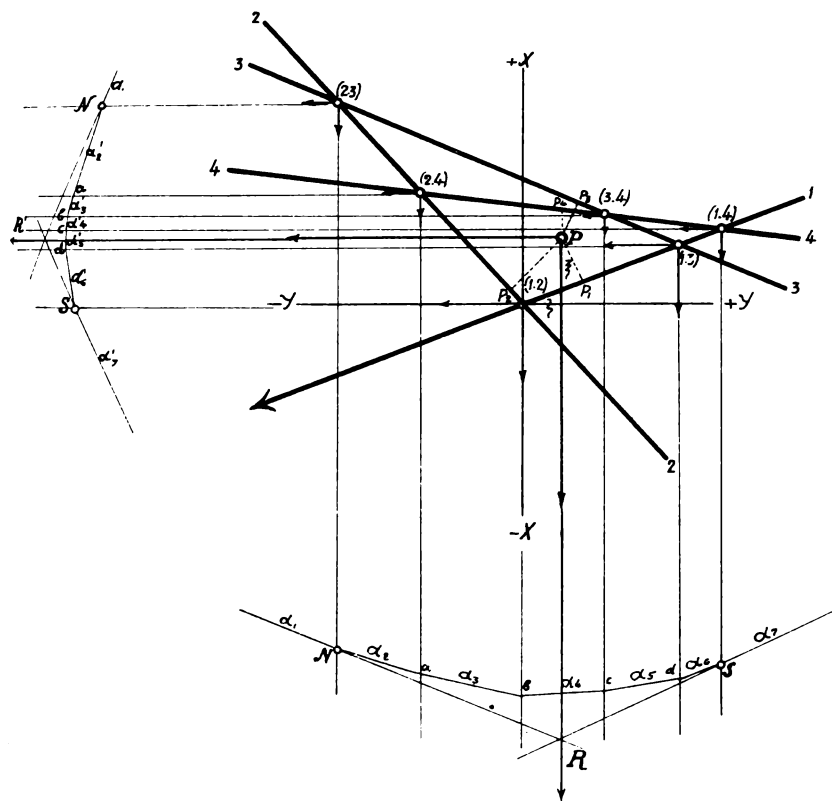


2/ep. 2

Черт. 3

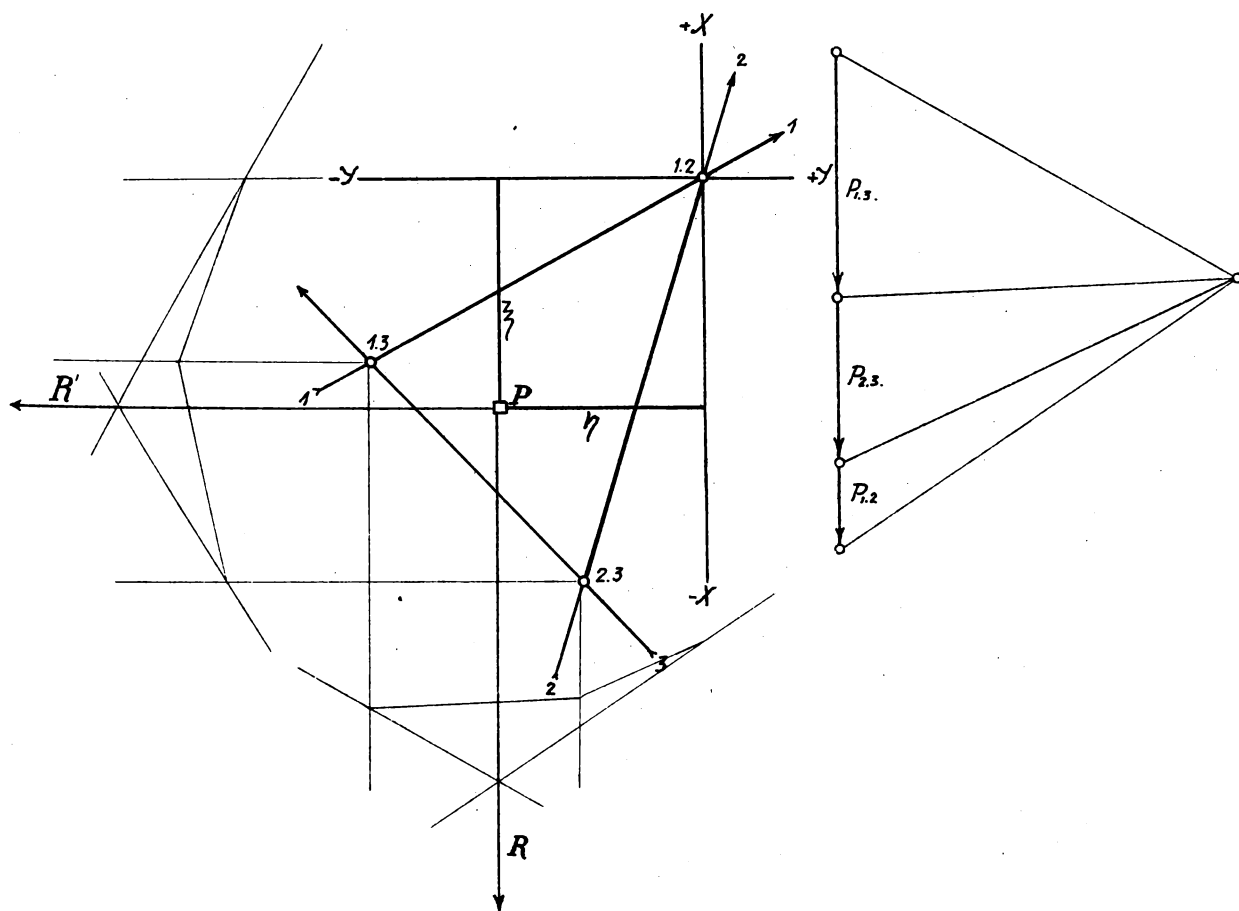
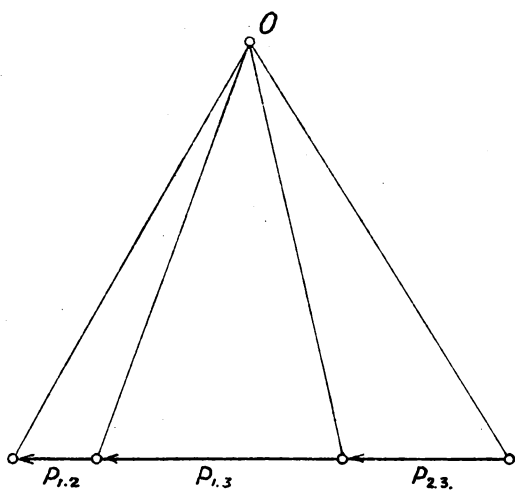


Черт. 4



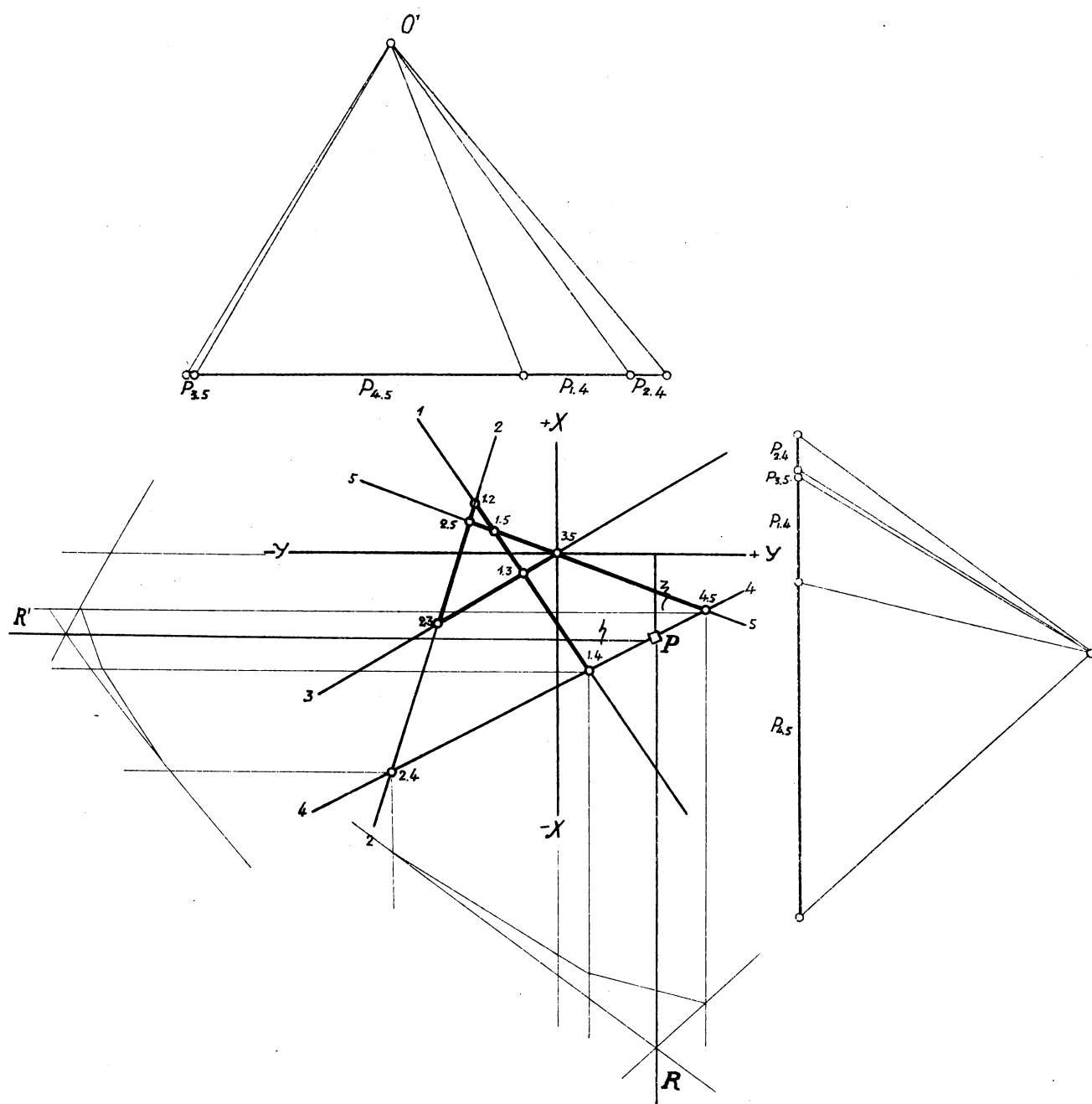
Черт. 6

Черм.5



$M \frac{1}{10}$ н. в

Зерм.7



$M \frac{1}{3} \text{ н.б}$

Диаграмма весов.

Масштаб
(вертикальный)
в 2 сантиметрах одна весовая единица

